© 2024 г. **М.А. ГОРЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук (griefer@ccas.ru),**
Ф.И. ЕРЕШКО, д-р техн. наук (fereshko@yandex.ru)
(Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва)

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ В ЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ

Описываются предпосылки появления теории иерархических игр. Приводится описание моделей и ссылки на набор статей, дающих представление о ключевых проблемах и полученных фундаментальных результатах. Уделяется внимание практическим приложениям. Основные понятия и положения иллюстрируются решениями в случае линейных задач. В заключение отмечается необходимость последующих исследований в области вычислительных методов.

Ключевые слова: исследование операций, иерархические игры, практические приложения, линейные задачи, вычислительные методы.

DOI: 10.31857/S0005231024100031, **EDN:** YVNTSW

1. Введение

Дисциплина исследования операций в отечественном представлении возникла на базе разработок по эффективности различных управляемых процессов [1]. Характерной особенностью отечественных разработок явилось принципиальное насыщение постановок математическими моделями.

В настоящей работе авторы продолжают эти традиции, убеждаясь, что все новые подходы вполне удачно вписываются в конструкции исследования операций.

Принцип оптимальности, принятый в отечественной школе, опирается на идею гарантированного результата при анализе операций, содержащих неопределенности. Большое внимание уделяется порядку ходов активных участников операции, что позволило рассмотреть широкий класс задач с иерархической структурой.

Значительное продвижение достигнуто в области разработки численных методов при решении задач исследования операций, использующих методы штрафных функций.

В работе излагаются дальнейшие продвижения в упомянутых направлениях.

2. Иерархия. Примеры разработок

Вопросы управления и принятия решений в организационных системах с иерархической структурой обращали на себя большое внимание и имеют значительную литературу.

Остановимся, в частности, на некоторых примерах из зарубежных публикаций.

Нобелевская премия 2016 г. по экономике была присуждена Оливеру Харту (Гарвардский университет, США) и Бенгту Хольстрёму (Массачусетский технологический институт, США) за их вклад в теорию контрактов (где присутствуют ведущий и ведомый: Principal-agents), которая базируется на моделях взаимодействия иерархического характера. В официальном сообщении о присуждении премии говорится: “В современной экономике содержится неисчислимое число контрактов. Новые теоретические инструменты, созданные авторами (Hart и Holmström), ценны для понимания реальных контрактов и институтов, а также для учета возможных подводных камней в разработке контрактов. Их анализ оптимальных контрактов закладывает интеллектуальный фундамент для разработки стратегий и институтов во многих областях, от законодательства о банкротстве до политических конституций”. [2] Теория контрактов стала неотъемлемой частью современной экономической теории.

В зарубежной литературе при моделировании иерархических систем чаще используют модели равновесия по Штакельбергу. Основные работы Штакельберга были изданы в Австрии в 30-х гг. прошлого века. Отмечая иерархический характер структуры экономики он писал: «...зачем нам национализировать производства, лучше нам национализировать владельцев предприятий».

Более широкую известность идеи Штакельберга получили в 50-х гг., когда его книги были переведены на английский язык [3].

Фундаментальные работы по анализу конфликтных ситуаций в иерархических системах были получены школой Гермейера Ю.Б., значительная часть суммирована в [4].

Иерархия рассматривается как естественное развитие принципов оптимальности в теории игр и естественное приложение для задач исследования операций, где рассмотрение ведется в интересах оперирующей стороны.

Постановка задачи по анализу иерархических игр привлекла значительный интерес большой группы исследователей в ВЦ ФИЦ РАН (ВЦ АН СССР) и ВМК МГУ. Проявленная активность имела результатом три монографии, несколько десятков статей в ведущих журналах, выступления на конференциях и прикладные разработки в разных сферах [5–11].

К работам школы было привлечено внимание А.Б. Рапопорта, ведущего исследователя в теории систем, бывшего приглашенным директором Institute for Advanced Studies в Вене, и А.Б. Раппопорт сделал и выпустил английский перевод [12]. В Предисловии к переводу книги А.Б. Рапопорт пишет: “За пределами Советского Союза анализ такого сорта был в основном сосредоточен на процессах установления цены, где основные структуры игры, по большей части, довольно элементарны. В работе Germeier’а и его учеников, структура, в которой происходит процесс (включающий намного больше, чем торговля), была значительно расширена и разносторонне развита. Особенно интересной темой, одной, которой советские теоретики игры уделили значительное внимание, является тема так называемых иерархических игр, которые могут быть истолкованы как модели плановой экономики с различными степенями централизации или децентрализации".

Представляется, что эта оценка с одной стороны позитивна, а с другой стороны сыграла отрицательную роль, поскольку сместила акценты мнений западных коллег-экономистов, слишком привязав теорию иерархических игр к образу плановой экономики, имеющей для них негативный характер. Это необоснованно, поскольку принцип гарантированного результата не исключает равновесия, что замечательно иллюстрируется на примере теоремы о существовании седловой точки в играх с противоположными интересами.

К настоящему направлению исследования операций тесно примыкает теория открытого управления, обзор которой опубликован в [13], и теория механизмов [14].

Примером приложения может служить управление в крупномасштабных проектах многоукладной экономики, где необходимо полноценное информационное обеспечение для принятия стратегических решений [15, 16].

В настоящее время эти тенденции обретают конкретные организационные формы: "Значительные продвижения в автоматизации систем поддержки принятия управленческих решений в организационных системах осуществлены в рамках Системы распределенных ситуационных центров (СРСЦ), которые рассматриваются как технологическая и аппаратно-программная основа систем поддержки принятия решений. Основная цель современных ситуационных центров – осуществить поддержку процессов принятия решений руководством на основе наглядных представлений (образов) ситуаций, возникающих в подконтрольной среде, предоставить руководству визуализацию результатов их анализа в наиболее удобной для принятия решений форме. Не только анализ, но и прогноз, тенденции развития ситуации в кратко-, средне-, долгосрочной перспективе" [17].

Впрочем, осознавались эти потребности довольно давно. 50 лет назад академик В.М. Глушков писал: "Отметим также, что в отечественных разработках прошлого, в которых были суммированы идеи управления экономическими системами к тому времени, был принципиально поставлен вопрос о новом значении информации в жизни общества и описана трехуровневая в территориальном аспекте система ЭВМ в человеко-машинном варианте, которая накапливая и обрабатывая информацию, генерировала бы проекты государственных планов и реализовывали бы функции принятия решений. Система получила название Общегосударственной автоматизированной системы управления (ОГАС)" [18].

3. Модели теории иерархических игр

Появление новых информационных технологий, таких, как искусственный интеллект, заставляет по-новому взглянуть на некоторые задачи теории иерархических систем. Многие экономисты, как теоретики, так и практикующие бизнесмены, обращают внимание на актуальность такого рода исследований.

Недавно установлена [19, 20] формальная аналогия между задачей поиска весов в глубоком обучении искусственных нейронных сетей и задачей анализа взаимодействия активных элементов многоуровневой иерархической системы, стремящихся к оптимизации некоего общего критерия. Вероятно, анализ этой аналогии может оказаться полезным при решении обеих задач.

В теории исследования операций [1] принимается положение, что "операция есть совокупность целенаправленных действий". Математическая модель операции обычно включает фазовые переменные, неопределенные факторы и переменные управления, порождающие соответствующие действия.

В классических моделях теории иерархических игр [4, 8] принимаются следующие предположения:

- В системе имеется выделенный элемент (Центр), интересы которого отождествляются с интересами системы в целом.
- Центр обладает правом первого хода, т.е. он первым выбирает свою стратегию и этот выбор становится известным его контрагентам.
- Стратегия Центра может иметь сложную функциональную структуру, если Центр рассчитывает получить какую-то информацию о действиях партнеров.
- Предполагается, что подчиненные элементы системы действуют рационально, исходя из собственных интересов в рамках правил, определяемых Центром.
- Центр осторожен, т.е. ориентируется на наихудший для него выбор партнеров.

С теоретической точки зрения необходимо отметить, что исследование должно сочетать имитационные и оптимизационные подходы.

4. Описание технологических ограничений

В работе в качестве объекта исследования принимаются линейные модели управляемых систем. Выбор характера зависимости определяется содержательными и аналитическими возможностями, предоставляемыми фундаментальными теориями балансов Леонтьева В.В. и производственных процессов Канторовича–Купманса.

Термин "агент", понимается в смысле определениея из работы [21]: "типизированный субъект, интересы и информированность которого соответствуют исполняемой им роли в данной общественной системе разделения труда, называется агентом (agent). Заметим, что в обществе система ролей устроена так, что и согласование интересов с ролями происходит на всех уровнях иерархии, поэтому под агентом можно понимать не только физическое лицо, но и юридическое лицо – организацию".

Рассмотрим линейную модель управления сложной производственной системой.

Будем считать, что рассматриваемая система состоит из n агентов. Пронумеруем их натуральными числами от 1 до n.

Пусть в системе производится m типов продукции, а в процессе производства используется k различных типов ресурсов. Предположим, что в процессе производства одной единицы продукта типа j i-й агент затрачивает ресурс вида l в количестве p^i_{lj}. В системе имеются централизованные запасы ресурса вида l в количестве r_l $(l = 1, \ldots, k)$. Вдобавок i-й агент имеет собственный запас такого ресурса. Его объем обозначим через b^i_l.

Предполагается, что продукция вида j может быть оценена по цене c_j.

Нормативы затрат будем считать не зависящими от объема производства. В этом предположении при производстве x^i_j единиц продукции типа j $(j = 1, \ldots, m)$ агентом i затрачивается $p^i_{l1}x^i_1 + p^i_{l2}x^i_2 + \ldots + p^i_{lm}x^i_m$ единиц ресурса вида l. За всю произведенную продукцию агент i может выручить сумму $c_1x^i_1 + c_2x^i_2 + \ldots + c_mx^i_m$.

Цены c_j будем считать положительными. Разумеется, что коэффициенты затрат p^i_{lj} неотрицательны. Никакая продукция не может быть произведена совсем без затрат. Поэтому естественно предполагать, что при всех i и всех j хотя бы один коэффициент $p^i_{1j}, \ldots, p^i_{kj}$ строго положителен. Объемы запасов b^i_l и r_l разумно считать неотрицательными.

Для сокращения формул используем матричные обозначения. Вектор выпусков i-го агента $\left(x^i_1, \ldots, x^i_m\right)^{\mathrm{T}}$ будем обозначать символом x^i (верхний индекс “T” обозначает транспонирование). Пусть $c = (c_1, \ldots, c_m)$ – вектор цен, а

$$P^i = \begin{pmatrix} p^i_{11} & p^i_{12} & \cdots & p^i_{1m} \\ p^i_{21} & p^i_{22} & \cdots & p^i_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^i_{k1} & p^i_{k2} & \cdots & p^i_{km} \end{pmatrix}$$

– матрица затрат. Тогда вектор затрат $y^i = \left(y^i_1, \ldots, y^i_k\right)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяет условию $y^i = P^i x^i$, а сумма, получаемая агентом i за выпущенную продукцию равна cx^i.

Для векторов запасов введем обозначения $b^i = (b^i_1, \ldots, b^i_k)^{\mathrm{T}}$, $r = (r_1, \ldots, r_k)^{\mathrm{T}}$.

Обозначим буквой Y множество всех наборов векторов $y^1, y^2, \ldots, y^n$, удовлетворяющих условиям

$$y^1 + \ldots + y^n \leqslant r,$$
$$y^i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

(как обычно все векторные неравенства понимаются как покомпонентные).

Как отмечалось выше, вопрос исследования иерархических систем тесно связан с вопросами централизации и децентрализации [22, 23].

В целях иллюстрации приведем ограниченное рассмотрение некоторых проблем приложения теоретического исследования экономических операций в организационных системах.

5. Централизованное распределение ресурсов

В данном разделе будем предполагать, что существует некий субъект (Центр), который управляет деятельностью всех агентов. А именно, Центр определяет объемы централизованных ресурсов y^i, выделяемых каждому из агентов, и их объемы выпусков x^i. Целью управления будем считать максимизацию суммарного дохода всех агентов.

Предположим, что параметры системы, относящиеся к отдельным агентам, известны Центру неточно. Такую ситуацию можно моделировать различными способами. В данном случае будем использовать "интервальный" способ. Будем считать, что Центру неизвестны точно нормы затарат p^i_{lj} и "собственные" запасы агентов, а известно лишь, что $p^{i-}_{lj} \leqslant p^i_{lj} \leqslant p^{i+}_{lj}$ и $b^{i-}_l \leqslant b^i_l \leqslant b^{i+}_l$.

Определив матрицы

$$P^{i-} = \begin{pmatrix} p^{i-}_{11} & p^{i-}_{12} & \dots & p^{i-}_{1m} \\ p^{i-}_{21} & p^{i-}_{22} & \dots & p^{i-}_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{i-}_{k1} & p^{i-}_{k2} & \dots & p^{i-}_{km} \end{pmatrix}, \quad P^{i+} = \begin{pmatrix} p^{i+}_{11} & p^{i+}_{12} & \dots & p^{i+}_{1m} \\ p^{i+}_{21} & p^{i+}_{22} & \dots & p^{i+}_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{i+}_{k1} & p^{i+}_{k2} & \dots & p^{i+}_{km} \end{pmatrix},$$

и векторы

$$b^{i-} = \left(b^{i-}_1, \dots, b^{i-}_k\right)^{\mathrm{T}}, \quad b^{i+} = \left(b^{i+}_1, \dots, b^{i+}_k\right)^{\mathrm{T}},$$

эти условия можно более компактно записать в виде $P^{i-} \leqslant P^i \leqslant P^{i+}$ и $b^{i-} \leqslant b^i \leqslant b^{i+}$. Разумеется, предполагается что матрицы P^{i-}, P^{i+} и векторы b^{i-}, b^{i+} Центру известны.

Естественно предполагать, что Центр не может нарушать законов сохранения "физических" величин, поэтому свои управления он должен выбирать так, чтобы у каждого агента хватило ресурсов на его собственную производственную программу при любых значениях неопределенных параметров (из заданных интервалов).

Таким образом, получаем не совсем обычную задачу оптимизации:

$$cx^1 + cx^2 + \ldots + cx^n \to \max,$$

при ограничениях

$$P^i x^i \leqslant b^i + y^i, \quad i = 1, \dots, n,$$
$$y^1 + y^2 + \ldots + y^n \leqslant r, \;\; x^i \geqslant 0, \quad y^i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ее необычность заключается в том, что ограничения $P^i x^i \leqslant b^i + y^i$, $i = 1, 2, \dots, n$, должны выполняться при любых $P^{i-} \leqslant P^i \leqslant P^{i+}$ и $b^{i-} \leqslant b^i \leqslant b^{i+}$. Таким образом, формально получается задача с бесконечным числом ограничений. Однако эта проблема решается легко.

Действительно, если выполнены неравенства $P^{i+} x^i \leqslant b^{i-} + y^i$, $i = 1, \dots, n$, то неравенства $P^i x^i \leqslant b^i + y^i$, $i = 1, \dots, n$ будут выполнены при всех $P^i \leqslant P^{i+}$

и $b^{i-} \leqslant b^i$. Разумеется, условие $P^{i+}x^i \leqslant b^{i-} + y^i$, $i = 1, \ldots, n$ является и необходимым.

Значит, поставленная задача эквивалентна стандартной задаче линейного программирования

$$cx^1 + cx^2 + \ldots + cx^n \to \max,$$
$$P^{i+}x^i \leqslant b^{i-} + y^i, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$y^1 + y^2 + \ldots + y^n \leqslant r, \quad x^i \geqslant 0, \quad y^i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

управлениями в которой являются векторы выпусков x^i и векторы выделенных агентам ресурсов y^i $(i = 1, \ldots, n)$.

Дополнительная структура этой задачи, связанная с наличием нескольких агентов, позволяет произвести ее декомпозицию, используя идеологию множителей Лагранжа.

По теореме Куна–Такера существует такой вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ с неотрицательными компонентами, что одна из точек максимума функции

$$cx^1 + cx^2 + \ldots + cx^n - \lambda y^1 - \lambda y^2 - \ldots - \lambda y^n$$

при ограничениях

$$P^{i+}x^i \leqslant b^{i-} + y^i, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$x^i \geqslant 0, \quad y^i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

является решением рассматриваемой задачи линейного программирования.

Для поиска этой точки максимума можно решить n "маленьких" задач линейного программирования

$$cx^i - \lambda y^i \to \max$$
$$P^{i+}x^i \leqslant b^{i-} + y^i, \; x^i \geqslant 0, \; y^i \geqslant 0$$

с управлениями x^i и y^i.

Это обстоятельство можно использовать для построения итеративных процедур поиска решений основной задачи. Но в данной статье важнее интерпретация этих конструкций.

Число λ_l можно интерпретировать как цену ресурса вида l. Эту цену назначает Центр. После этого каждый из агентов выбирает свою программу выпуска x^i и объем закупаемых ресурсов y^i с тем, чтобы максимизировать свою прибыль $cx^i - \lambda y^i$. Если при этом агенты будут доброжелательно относиться к Центру, то при таком децентрализованном выборе управлений "общее" ограничение $y^1 + \ldots + y^n \leqslant r$ окажется выполненным. В противном случае выбором одних только цен невозможно решить поставленную задачу и нужно предусматривать какие-то иные механизмы согласования действий агентов.

Замечание 1. Ситуация здесь достаточно типична для линейных моделей. Пусть имеется несколько одинаковых предприятий, способных производить два вида продукции, стремясь максимизировать собственную прибыль. Если цены на продукты таковы, что первый вид продукции прибыльнее второго, то второй вид продукции никто производить не станет. Поэтому, если есть задача произвести заданный набор продуктов, то эти цены должны быть таковы, что прибыль от производства обоих видов продукции одинакова. Но тогда все программы производства любого предприятия, полностью загружающие его мощности, будут оптимальными. И при независимом принятии решений нет гарантии, что будет произведен именно нужный набор продукции. Следовательно, необходим некий механизм согласования решений. Впрочем, особых проблем здесь обычно не возникает, поскольку этот механизм будет предписывать каждому предприятию выбор из одинаково выгодных решений.

Замечание 2. Если взять допустимую точку $\left(x^i, y^i\right)$ последней задачи, то при любом положительном t точка $\left(tx^i, ty^i\right)$ также будет допустимой. Но при умножении переменных на t значение критерия тоже умножается на t. Следовательно, оптимальное значение критерия равно нулю. Поэтому имеет смысл, поменяв знак критерия говорить о минимизации убытков, а не о максимизации прибыли.

Замечание 3. Понятно, что при положительных y_l^i ограничение

$$p_{l1}^i x_1^i + p_{l2}^i x_2^i + \ldots + p_{lm}^i x_m^i \leqslant b_l^i + y_l^i$$

в точке оптимума обращается в равенство. Поэтому при $k > m$ решение последней задачи будет вырожденным. Весьма вероятно, что при решении задачи симплекс-методом вырождение появится еще “на подходе” к оптимуму.

6. Децентрализованная постановка при независимых агентах

Интерпретация, описанная в разделе 5, приводит к рассмотрению иной схемы управления той же системой.

Пусть по-прежнему имеется выделенный субъект (Центр), который имеет право выбирать распределение “общих” ресурсов $y^1, \ldots, y^n$. Его цель состоит в максимизации суммарного производства, оцениваемого с помощью вектора цен c. Свой выбор Центр делает первым, и этот выбор становится известным всем агентам.

Исходя из имеющихся у него ресурсов, i-й агент выбирает объем выпуска продукции x^i. При этом он стремится максимизировать стоимость выпущенной продукции $c^i x^i$.

По-прежнему будем предполагать, что Центр знает пределы, в которых могут меняться коэффициенты матриц затрат P^i и векторов запасов b^i ($P^{i-} \leqslant P^i \leqslant P^{i+}$ и $b^{i-} \leqslant b^i \leqslant b^{i+}$). Кроме того, Центру точно известны интересы всех агентов (векторы $c^i = (c_1^i, \ldots, c_m^i)$).

Введем обозначения. Множество матриц P^i, удовлетворяющих условиям $P^{i-} \leqslant P^i \leqslant P^{i+}$ обозначим через Π^i, а множество векторов b^i, удовлетворяющих ограничениям $b^{i-} \leqslant b^i \leqslant b^{i+}$ – через B^i.

Естественно считать, что агент i точно знает "свои" матрицу P^i и вектор b^i.

В описанных предположениях каждый из агентов решает простую задачу оптимизации

$$c^i x^i \to \max, \quad P^i x^i \leqslant b^i + y^i, \quad x^i \geqslant 0,$$

и, что особенно важно, Центр, зная интересы агентов, способен верно оценить множество $BR^i(y^i, P^i, b^i)$ всех решений этой задачи. Если он рассчитывает на рациональное поведение всех агентов и осторожен по отношению к остающейся неопределенности, он должен ориентироваться на максимальный гарантированный результат

$$\sup_{(y^1,y^2,\ldots,y^n)\in Y} \; \min_{(P^1,P^2,\ldots,P^n)\in\Pi^1\times\Pi^2\times\ldots\times\Pi^n} \; \min_{(b^1,b^2,\ldots,b^n)\in B^1\times B^2\times\ldots\times B^n}$$

$$\min_{(x^1,x^2,\ldots,x^n)\in BR^1(y^1,P^1,b^1)\times BR^2(y^2,P^2,b^2)\times\ldots\times BR^n(y^n,P^n,b^n)} \left(cx^1 + cx^2 + \ldots + cx^n\right).$$

Попробуем соотнести этот результат с результатом Центра в задаче из раздела 5 (на самом деле там рассмотрены две схемы управления, но они дают одинаковые результаты).

Зафиксируем произвольное оптимальное решение $y^1, \ldots, y^n, x^1, \ldots, x^n$ задачи из раздела 5 и произвольное распределение $v^1, \ldots, v^n$ ресурсов, удовлетворяющее ограничениям

$$v^1 + v^2 + \ldots + v^n \leqslant r, \quad v^i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть z^i – оптимальное решение задачи

$$cz^i \to \max, \quad P^{i+} z^i \leqslant b^{i-} + v^i, \quad z^i \geqslant 0.$$

Тогда для любого w^i, удовлетворяющего условиям $P^{i+} w^i \leqslant b^{i-} + v^i$, $w^i \geqslant 0$, выполняется неравенство $cw^i \leqslant cz^i$. В частности, неравенство $cw^i \leqslant cz^i$ справедливо для любого $w^i \in BR(v^i, P^{i+}, b^{i-})$.

Сложив эти неравенства, получим $cw^1 + cw^2 + \ldots + cw^n \leqslant cz^1 + cz^2 + \ldots + cz^n$.

Как было показано в разделе 5, для решения рассмотренной там задачи выполняются ограничения

$$P^{i+} x^i \leqslant b^{i-} + y^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad y^1 + y^2 + \ldots + y^n \leqslant r,$$
$$x^i \geqslant 0, \quad y^i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, $cz^1 + cz^2 + \ldots + cz^n \leqslant cx^1 + cx^2 + \ldots + cx^n$.

А тогда верно неравенство $cw^1 + cw^2 + \ldots + cw^n \leqslant cx^1 + cx^2 + \ldots + cx^n$.

Тем более

$$\min_{(w^1,w^2,\ldots,w^n)\in BR^1(w^1,P^1,b^1)\times BR^2(w^2,P^2,b^2)\times\ldots\times BR^n(w^n,P^n,b^n)} \left(cw^1+cw^2+\ldots+cw^n\right)\leqslant$$
$$\leqslant cx^1+cx^2+\ldots+cx^n.$$

и

$$\min_{(P^1,P^2,\ldots,P^n)\in\Pi^1\times\Pi^2\times\ldots\times\Pi^n}\ \min_{(b^1,b^2,\ldots,b^n)\in B^1\times B^2\times\ldots\times B^n}$$
$$\min_{(w^1,w^2,\ldots,w^n)\in BR^1(w^1,P^1,b^1)\times BR^2(w^2,P^2,b^2)\times\ldots\times BR^n(w^n,P^n,b^n)} \left(cw^1+cw^2+\ldots+cw^n\right)\leqslant$$
$$\leqslant cx^1+cx^2+\ldots+cx^n.$$

Поскольку распределение $v^1, v^2, \ldots, v^n$ было выбрано произвольно, отсюда следует, что

$$\sup_{(v^1,v^2,\ldots,v^n)\in Y}\ \min_{(P^1,P^2,\ldots,P^n)\in\Pi^1\times\Pi^2\times\ldots\times\Pi^n}\ \min_{(b^1,b^2,\ldots,b^n)\in B^1\times B^2\times\ldots\times B^n}$$
$$\min_{(w^1,w^2,\ldots,w^n)\in BR^1(w^1,P^1,b^1)\times BR^2(w^2,P^2,b^2)\times\ldots\times BR^n(w^n,P^n,b^n)} \left(cw^1+cw^2+\ldots+cw^n\right)\leqslant$$
$$\leqslant cx^1+cx^2+\ldots+cx^n.$$

Таким образом, максимальный гарантированный результат Центра в задаче из данного раздела всегда не превосходит максимального гарантированного результата Центра в задаче из раздела 5. Пример задачи (без интерпретации), в которой это неравенство строгое, строится без особого труда.

Достаточно давно известно, что в условиях отсутствия неопределенности два рассмотренных способа управления одинаково эффективны. Здесь проявляется новый качественный эффект: в условиях неопределенности "экономический" способ управления (с помощью цен на ресурсы) может оказаться более эффективным, чем директивный (с помощью выбора физических показателей). Этот эффект еще предстоит детально изучить.

7. Веерная структура. Два уровня

В [24, 25] отмечено, что сформулированные выше задачи по распределению Центром некоторого ресурса могут быть записаны в двухуровневой системе в общем виде: найти

$$\max_{u\in D}\left(\min_{x\in T(u)}\sum_{j=1}^{n}k_jx_j\right)=\max_{u\in D}F(u),$$

где

$$T(u)=\left\{x|x\in T_0(u), \sum_{j=1}^{n}c_jx_j=\max_{y\in T_0(u)}\sum_{j=1}^{n}c_jy_j\right\},$$

$$T_0(u) = \left\{ x | x \in E^n, x \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i + \sum_{l=1}^{k} b_{il} u_l, i = 1, \ldots, m \right\},$$

$$D = \left\{ u | u \in E^n, u \geqslant 0, \sum_{l=1}^{k} d_{rl} u_l \leqslant d_r, r = 1, \ldots, p \right\}.$$

Задачи в данной формулировке рассматривались многими авторами, настоящее изложение следует постановке из [24].

Введем в рассмотрение функцию

$$F_0(u) = \sum_{j=1}^{u} k_j x_j,$$

где $x \in T(u)$. Эту функцию можно определить не при всех значениях $u \in \mathbb{R}^k$, так как $T(u)$ может быть пустым множеством. В частности, если при всех значениях u сформулированная задача не имеет решений, то $F_0(u)$ вообще не определена. Далее будем считать, что существует $u_0 \in D$ такое, что $T(u_0) \neq \emptyset$ и $T(u_0)$ – ограниченное множество. Если $T(u)$ содержит более одного элемента, то функция $F_0(u)$ может принимать несколько значений. Введем также обозначение

$$F(u) = \min_{x \in T(u)} F_0(u).$$

Справедливо следующее утверждение, которое позволило перейти от максиминной задачи к оптимизационной.

Теорема 1 [24]. *Существует $\delta_0 > 0$ такое, что при всех δ, $0 < \delta < \delta_0$ функция*

$$F_0^\delta = \sum_{j=1}^{n} k_j x_j,$$

где $x \in T^\delta(u)$, однозначна и $F(u) = F_0^\delta(u)$,

$$T^\delta(u) = \left\{ x | x \in T_0(u), \sum_{j=1}^{n} (c_j - \delta k_j) x_j = \max_{y \in T_0(u)} \sum_{j=1}^{n} (c_j - \delta k_j) y_j \right\}.$$

Замечание 4. При построении алгоритма конкретное значение δ, необходимое по теореме, не используется. Важен только факт существования такой величины.

8. Веерная структура. Трехуровневая система

Приведем упрощенный вариант модели стратегического планирования [20], учитывающий взаимодействие активных элементов системы. Цель построения этой модели – сравнение различных схем управления.

Прообразом для этой модели служила система, состоящая из Центра, нескольких интегрированных структур (холдингов) и набора входящих в эти холдинги предприятий. Существуют технологические связи между элементами такой системы. Предприятия, используя свои мощности и выделенные им ресурсы, производят продукцию и передают ее на следующий уровень ("своим" холдингам), те перерабатывают ее и передают в Центр. На эту структуру накладываются организационные связи: элементы более высокого уровня определяют объемы ресурсов, выделяемых своим подчиненным. Все эти связи естественным образом моделируются с помощью игры с иерархической структурой.

Рассмотрим модель трехуровневой иерархической системы, состоящей из Центра и двух агентов.

Центр выбирает вектор-столбец x из множества

$$X = \{x : x \geqslant 0, Ax \leqslant a\}.$$

Здесь A – матрица с неотрицательными коэффициентами, a – вектор столбец с положительными элементами. Дополнительно будем предполагать, что каждый столбец матрицы A содержит хотя бы один строго положительный элемент (ни один вид продукции не производится без затраты хоть каких-то ресурсов). Матрица A и вектор a – это параметры задачи.

При сделанных предположениях множество X представляет собой непустой замкнутый выпуклый ограниченный многогранник.

Замечание 5. Можно рассматривать модели, в которых a – вектор с неотрицательными элементами. Этот случай легко сводится к рассматриваемому с понижением размерности задачи.

При выбранном векторе x агент верхнего уровня выбирает вектор столбец y из множества

$$Y(x) = \{y : y \geqslant 0, By \leqslant x\}.$$

Здесь B – заданная матрица с неотрицательными элементами, не содержащая нулевых столбцов.

Непосредственно проверяется, что при всяком x множество $X(y)$ представляет собой непустой выпуклый и компактный многогранник.

Наконец, если выбран вектор y, агент нижнего уровня выбирает вектор z из множества

$$Z(y) = \{z : z \geqslant 0, Cz \leqslant y\}.$$

Матрица C с неотрицательными элементами, не содержащая нулевых столбцов, вновь предполагается параметром задачи.

Из сделанных предположений следует, что множество $Z(y)$ – непустой замкнутый, выпуклый и ограниченный многогранник.

Цель агента нижнего уровня состоит в максимизации значения функции $h(z) = rz$, где r – заданный вектор строка. Аналогично, интересы агента верхнего уровня описываются стремлением к увеличению значения функции

$g(y) = qy$, где вектор строка q считается параметром задачи. Наконец, будем предполагать, что выигрыш Центра определяется функцией $f(z) = pz$, где p – заданный вектор-строка. Элементы векторов p, q, r будем считать неотрицательными.

Размерности векторов a, x, y и z предполагаются конечными и, вообще говоря, не совпадающими. Будем считать, что размерности матриц A, B, C и векторов p, q, r таковы, что все выписанные выше формулы формально корректны (таким образом, эти размерности определяются однозначно).

Считаем, что все параметры системы, т.е. матрицы A, B, C и векторы p, q, r точно известны Центру.

Предполагается следующий порядок принятия решений. Вначале Центр выбирает свою стратегию x из множества X. Затем агент верхнего уровня выбирает свою стратегию y из множества $Y(x)$. И, наконец, агент нижнего уровня выбирает стратегию z из множества $Z(y)$.

При сделанных предположениях для агента верхнего уровня естественно выбирать свою стратегию из множества

$$BR^t(x) = \left\{ y \in Y(x) : g(y) = \max_{v \in Y(x)} g(v) \right\}.$$

Аналогично, все разумные выборы агента нижнего уровня и только они принадлежат множеству

$$BR^l(y) = \left\{ z \in Z(y) : h(z) = \max_{w \in Z(y)} h(w) \right\}.$$

При сделанных предположениях при любом $x \in X$ максимум в определении величины $BR^t(x)$ достигается, а само множество $BR^t(x)$ представляет собой непустой выпуклый и компактный многогранник. Аналогично, при любом векторе y с неотрицательными компонентами множество $BR^l(y)$ – непустой выпуклый замкнутый и ограниченный многогранник.

Если Центру известны параметры модели, то он способен самостоятельно оценить множества $BR^t(x)$ и $BR^l(y)$. Более точно оценить множества возможных выборов агентов Центр не может. Если Центр осторожен, то его максимальный гарантированный результат равен

$$\sup_{x \in X} \min_{y \in BR^t(x)} \min_{z \in BR^l(y)} f(z).$$

Будем заниматься задачей вычисления этой величины.

Из сказанного выше следует, что минимумы в последней формуле достигаются. Достижимость верхней грани придется исследовать отдельно.

9. Эквивалентная задача

Ограничения $y \in BR^t(x)$ и $z \in BR^l(y)$ не стандартны: в них присутствуют (заранее неизвестные) максимумы функций. По крайней мере для некоторых целей от этих ограничений стоит избавиться, пусть даже за счет увеличения размерности задачи. Сделаем это.

Пусть задано произвольное $x \in X$. Для $v \in Y(x)$ и $w \in Z(y)$ определим множества

$$V(x,v) = \{y \in Y(x) : qy \geqslant qv\},$$
$$W(y,w) = \{z \in Z(y) : rz \geqslant rw\}.$$

Для всех x, y, v, w множества $V(x,v)$ и $W(y,w)$ – компактные выпуклые многогранники.

Для любого $w \in Z(y)$ и любого $z \in BR^l(y)$ выполняется неравенство $rz \geqslant rw$, т.е. справедливо включение $BR^l(y) \subseteq W(y,w)$. Следовательно,

$$\min_{z \in BR^l(y)} f(z) \geqslant \min_{z \in W(y,w)} f(z),$$

и в силу произвольности $w \in Z(y)$ выполняется неравенство

$$\min_{z \in BR^l(y)} f(z) \geqslant \sup_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z).$$

Выберем теперь $w' \in Z(y)$ так, что $w' \in BR^l(y)$. Тогда по определению имеем $W(y,w') = BR^l(y)$. Значит,

$$\min_{z \in BR^l(y)} f(z) = \min_{z \in W(y,w')} f(z)$$

и тем более

$$\min_{z \in BR^l(y)} f(z) \leqslant \sup_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z).$$

Следовательно, верхняя грань в последней формуле достигается и

$$\min_{z \in BR^l(y)} f(z) = \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z).$$

Аналогично для любого $v \in Y(x)$ и любого $y \in BR^t(x)$ выполняется неравенство $qy \geqslant qv$, т.е. справедливо включение $BR^t(x) \subseteq V(x,v)$. Следовательно,

$$\min_{y \in BR^t(x)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z) \geqslant \min_{y \in V(x,v)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z)$$

и в силу произвольности $v \in Y(x)$ выполняется неравенство

$$\min_{y \in BR^t(x)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z) \geqslant \sup_{v \in Y(x)} \min_{y \in V(x,v)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z).$$

Выберем теперь $v' \in Y(x)$ так, что $v' \in BR^t(x)$. Тогда $V(x,v') = BR^t(x)$ и потому

$$\min_{y \in BR^t(x)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z) = \min_{y \in V(x,v')} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z).$$

Тем более
$$\min_{y\in BR^t(x)}\max_{w\in Z(y)}\min_{z\in W(y,w)} f(z)\leqslant \sup_{v\in Y(x)}\min_{y\in V(x,v)}\max_{w\in Z(y)}\min_{z\in W(y,w)} f(z).$$

Значит, верхняя грань в последней формуле достигается и имеет место равенство
$$\min_{y\in BR^t(x)}\max_{w\in Z(y)}\min_{z\in W(y,w)} f(z)= \max_{v\in Y(x)}\min_{y\in V(x,v)}\max_{w\in Z(y)}\min_{z\in W(y,w)} f(z),$$
или
$$\min_{y\in BR^t(x)}\min_{z\in BR^l(y)} f(z)= \max_{v\in Y(x)}\min_{y\in V(x,v)}\max_{w\in Z(y)}\min_{z\in W(y,w)} f(z).$$

В силу произвольности $x\in X$ получим отсюда
$$\sup_{x\in X}\min_{y\in BR^t(x)}\min_{z\in BR^l(y)} f(z)= \sup_{x\in X}\max_{v\in Y(x)}\min_{y\in V(x,v)}\max_{w\in Z(y)}\min_{z\in W(y,w)} f(z).$$

Задачи вычисления максимального гарантированного результата в подобных случаях чрезвычайно сложны. Поэтому наличие двух способов вычисления представляется нелишним, даже если каждый из них не слишком эффективен.

Кроме того, полученный результат позволяет более адекватно оценить сложность решаемой задачи.

10. Существование решения

Сформулируем некоторые предварительные результаты.

Пусть $x\in\mathbb{R}$. Система линейных неравенств $Ax\leqslant a$ задает некоторое множество точек $P=\{x : Ax\leqslant a\}$. Если это множество не пусто, то оно представляет собой многогранник. Для простоты будем считать, что это множество не пусто и ограничено. Тогда оно компактно.

Пусть a^i $(i=1,\dots,k)$ – строки матрицы A, а a_i – компоненты вектора столбца a. Для точки $x\in P$ определим множество $I(x)$ индексов $i=1,2,\dots,d$, для которых $a^ix=a_i$. Положим $J(x)=\{1,\dots,k\}\setminus I(x)$.

Пусть $I\subset\{1,\dots,k\}$. Если множество $P_I=\{x\in P : I(x)=I\}$ не пусто, то оно является гранью многогранника P. Если множество I таково, что система векторов a^i, $i\in I$, содержит d линейно независимых векторов, то множество P_I либо пусто, либо состоит из одной точки. В последнем случае эта точка является вершиной многогранника P.

Пусть L_I – линейная оболочка множества P_I. Тогда грань P_I является открытым подмножеством пространства L_I (в топологии индуцированной евклидовой топологией на $\mathbb{R}^d$), поскольку задается системой строгих неравенств $a^ix<a_i$, $i\in J(y)$ для некоторой точки $y\in P_I$.

Многогранник P является объединением своих попарно не пересекающихся граней.

Лемма 1. Замыкание любой грани P_I многогранника P содержит хотя бы одну вершину этого многогранника.

Доказательство леммы содержится в Приложении.

В дальнейшем будет использоваться следующий вариант принципа множителей Лагранжа.

Лемма 2. Пусть $x \in P$. Точка x доставляет максимум функции px на множестве P тогда и только тогда, когда существуют такие неотрицательные числа λ^i, $i \in I(x)$, что $p = \sum_{i \in I(x)} \lambda^i a^i$.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Теперь вернемся к основной задаче.

Исход (x, y, z) будем называть полуоптимальным, если $y \in BR^t(x)$, $z \in BR^l(y)$ и $f(z) = \min_{z' \in BR^l(y)} f(z')$. По определению, максимальный гарантированный результат Центра равен точной верхней грани функции $f(z)$ по множеству всех полуоптимальных исходов (x, y, z).

Рассмотрим многогранник

$$P = \{(x, y, z) : x \geqslant 0,\ Ax \leqslant a,\ y \geqslant 0,\ By \leqslant x,\ z \geqslant 0,\ Cz \leqslant y\}.$$

Пусть исход $(x, y, z) \in P$ полуоптимален. Покажем, что тогда всякий исход (x', y', z'), принадлежащий грани $P_{I(x,y,z)}$ многогранника P, содержащей точку (x, y, z), является полуоптимальным.

Рассмотрим многогранники

$$\Pi(x) = \{(y, z) : y \geqslant 0,\ By \leqslant x,\ z \geqslant 0,\ Cz \leqslant y\}$$

и

$$\Pi(x') = \{(y, z) : y \geqslant 0,\ By \leqslant x',\ z \geqslant 0,\ Cz \leqslant y\}.$$

Обозначим $\bar{x} = (y, z)$, $\bar{x}' = (y', z')$, а неравенства, задающие многогранник $\Pi(x)$, запишем в виде $\bar{A}\bar{x} \leqslant \bar{a}(x)$, где $\bar{A}$ – некоторая матрица, а $\bar{a}(x)$ – вектор. Тогда многогранник $\Pi(x')$ будет задаваться неравенствами $\bar{A}\bar{x} \leqslant \bar{a}(x')$ с той же матрицей $\bar{A}$ и, возможно, другим вектором $\bar{a}(x')$.

Пусть $\bar{a}^i$ – строки матрицы $\bar{A}$, $\bar{a}_i(x)$ и $\bar{a}_i(x')$ – элементы векторов $\bar{a}(x)$ и $\bar{a}(x')$ соответственно, а $I(\bar{x})$ – множество всех индексов i, для которых выполняются равенства $\bar{a}^i\bar{x} = \bar{a}_i(x)$. Поскольку исходы (x, y, z) и (x', y', z') принадлежат одной грани многогранника P, для тех же индексов выполняются равенства $\bar{a}^i\bar{x}' = \bar{a}_i(x')$.

В силу необходимого условия леммы 2 и включения $y \in BR^t(x)$ существуют такие неотрицательные числа λ^i, $i \in I(x)$, что $q = \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda^i \bar{a}^i$. Но тогда в силу достаточного условия леммы 2 выполняется включение $y' \in BR^t(x')$.

Наконец, рассмотрим многогранники

$$\Pi'(y) = \{z : z \geqslant 0,\ Cz \leqslant y\}$$

и

$$\Pi'(y') = \{z : z \geqslant 0,\ Cz \leqslant y'\}.$$

Повторяя те же рассуждения с использованием этих многогранников убедимся в справедливости включения $z' \in BR^l(y')$.

Рассмотрим теперь многогранники

$$\Pi''(y, z) = \{z'' : z'' \geqslant 0,\ Cz'' \leqslant y,\ rz'' = rz\}$$

и

$$\Pi''(y', z') = \{z'' : z'' \geqslant 0,\ Cz'' \leqslant y',\ rz'' = rz'\}.$$

Вновь повторяя те же рассуждения, но с использованием многогранников $\Pi''(y, z)$ и $\Pi''(y', z')$, придем к равенству $f(z') = \min_{z'' \in BR^l(y')} f(z'')$.

Таким образом, исход (x', y', z') является полуоптимальным.

В силу непрерывности, если исход (x, y, z), является полуоптимальным, то полуоптимальными будут все исходы из замыкания грани $P_{I(x,y,z)}$ многогранника P, содержащей точку (x, y, z).

Но замыкание любой грани многогранника само является замкнутым многогранником. Поэтому максимум линейной функции $f(z) = pz$ на замыкании любой грани непременно достигается в одной из вершин многогранника. Следовательно, для любого полуоптимального исхода (x, y, z) найдется вершина (x', y', z'), которая является полуоптимальным исходом и, кроме того, $pz' \geqslant pz$.

А поскольку множество вершин многогранника P конечно, верхняя грань

$$\sup_{x \in X} \min_{y \in BR^t(x)} \min_{z \in BR^l(y)} f(z)$$

непременно достигается, причем в такой точке x, что существуют такие $y \in \in Y(x)$ и $z \in Z(y)$, для которых тройка (x, y, z) является вершиной многогранника P.

Проверка полуоптимальности – это процедура по сложности сопоставимая с одним шагом симплекс-метода. Поэтому полученные результаты сводят рассматриваемую задачу к перебору всех вершин многогранника P.

В общем случае избежать такого перебора, вероятно, нельзя. Поэтому анализ по-настоящему серьезной модели таким способом вряд ли возможен. Но изучение действительно серьезных моделей обычно проводится в несколько этапов, на первом из которых исследуется упрощенная модель. На этом этапе получить точное решение задачи с помощью перебора, скорее всего, удастся. А дальше можно использовать какие-то эвристические методы (типа метода ветвей и границ), учитывая специфику конкретной модели.

11. Заключение

В работе излагаются дальнейшие продвижения в приложениях иерархических игр при моделировании управляемых процессов на базе линейных зависимостей.

Полученные результаты, несомненно, войдут в инструментарий исследования операций и формализованных подходов в теории принятии решений.

Выше отмечено, что задача анализа линейной иерархической игры сводится к перебору вершин некоторого многогранника, число которых может оказаться весьма большим. Поэтому для численного решения сформулированных задач необходимо привлечение различных приближенных методов, что составит предмет дальнейших разработок.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1.

Если P_I является вершиной, то все очевидно. В противном случае множество P_I открыто (в L_I), а его замыкание – замкнуто. Значит, существует точка y принадлежащая замыканию, но не принадлежащая самой грани P_I. Пусть $x \in P_I$.

Тогда $I(x) \subseteq I(y)$. В самом деле, если верно равенство $a^i x = a_i, i \in I(x)$, то верно и равенство $a^i z = a_i$ для любого $z \in P_I$. А тогда по непрерывности верно и равенство $a^i y = a_i$. Так как $y \notin I$, то включение $I(x) \subseteq I(y)$ – строгое.

На самом деле множество $I(y)$ содержит такой индекс j, что вектор a^j линейно не зависим от векторов $a^i,\ i \in I(x)$. Действительно, пусть j принадлежит $I(y)$, но не принадлежит $I(x)$. Предположим, вектор a^j линейно выражается через векторы $a^i,\ i \in I(x)$. Тогда из равенств $a^i x = a_i$ следует равенство $a^j x = a_j$, что противоречит условию $j \notin I(x)$.

Грань $P_I(y)$ принадлежит замыканию грани P_I. К грани $P_I(y)$ можно применить те же рассуждения, еще расширив множество $I(y)$. Но поскольку множество $\{1, 2, \ldots, k\}$ конечно, такая процедура не может продолжаться бесконечно. Значит, в какой-то момент придем к грани, являющейся вершиной. Она и будет искомой.

Лемма доказана.

Доказательство леммы 2.

Необходимость. В силу теоремы Куна–Такера существуют неотрицательные числа λ^i, для которых $p = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i a^i$. В силу условий дополняющей нежесткости $\lambda^i = 0$ при $i \in J(x)$. Следовательно, $p = \sum_{i \in I(x)} \lambda^i a^i$.

Достаточность. Пусть y – произвольная точка множества P. Тогда

$$py = \sum_{i \in I(x)} \lambda^i a^i y \leqslant \sum_{i \in I(x)} \lambda^i a_i = \sum_{i \in I(x)} \lambda^i a^i x = px.$$

По определению это означает, что x – точка максимума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
2. *Nobel Prize Committee et al.* Oliver Hart and Bengt Holmstrom: Contract Theory / Scientific Background on the Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel. 2016.

3. *von Stackelberg H.* The Theory of the Market Economy. London: William Hodge, 1952.
4. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1978.
5. *Кукушкин Н.С.* Роль взаимной информированности сторон в играх двух лиц с непротивоположными интересами // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 4. С. 1029–1034.
6. *Ватель И.А., Ерешко Ф.И.* Математика конфликта и сотрудничества. М.: Знание, 1973.
7. *Ватель И.А., Ерешко Ф.И., Кононенко А.Ф.* Игры с фиксированной последовательностью ходов и иерархические системы управления в экономике / Методы оптимизации и их приложения. Иркутск: Изд-во Сиб. энерг. ин-та, 1974. С. 86–99.
8. *Ватель И.А., Ерешко Ф.И.* Игры с иерархической структурой / Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1979. С. 478–482.
9. *Кукушкин Н.С., Морозов В.В.* Теория неантагонистических игр. М.: Изд-во МГУ, 1984.
10. *Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Динамические модели конфликтов. III. Иерархические игры // АиТ. 2015. № 2. С. 89–106.

    Gorelov M.A., Kononenko A.F. Dynamic Models of Conflicts. III. Hierarchical Games // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 2. P. 264–277.
11. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
12. *Germeier Yu.B.* Nonantagonistic games / Translated from the Russian and with a preface by Anatol Rapoport. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1986.
13. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
14. Механизмы управления: Учебное пособие / Под ред. Д.А. Новикова. М.: ЛЕЛАНД, 2011.
15. *Ерешко Ф.И., Турко Н.И., Цвиркун А.Д., Чурсин А.А.* Синтез организационных структур в крупномасштабных проектах цифровой экономики // АиТ. 2018. № 10. С. 121–142.

    Ereshko F.I., Turko N.I., Tsvirkun A.D., et al. Design of Organizational Structures in Large-Scale Projects of Digital Economy // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 10. P. 1836–1853.
16. *Ерешко Ф.И.* Управление в искусственных нейронных сетях // Информатика: проблемы, методы, технологии : материалы XXIII Международной научно-практической конференции им. Э.К. Алгазинова, Воронеж, 15–17 февраля 2023 года. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 2023. С. 4–26.
17. *Зацаринный А.А., Козлов С.В., Колин К.К.* Система распределенных ситуационных центров России как технологическая основа информационно-аналитического обеспечения органов государственного управления // Информационные процессы, системы и технологии. 2023. Т. 4. № 3 (27). С. 21–28.
18. *Глушков В.М.* Макроэкономические модели и принципы построения ОГАС. М.: Статистика, 1975.
19. *Ерешко Ф.И., Горелов М.А.* Иерархические игры в глубоком обучении // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD’2023. Тр. 16-й межд. конф. М.: ИПУ РАН, 2023. С. 63–67.

20. *Ерешко Ф.И., Мушков А.Ю., Турко Н.И., Цвиркун А.Д.* Управление в крупномасштабных проектах многоукладной экономики // АиТ. 2022. № 5. С. 102–132.

21. *Поспелов И.Г.* Системный анализ рыночной экономики. Уч. пос. М.: МФТИ, 2018.

22. *Горелов М.А., Ерешко Ф.И.* Информированность и децентрализация управления // АиТ. 2019. № 6. С. 156–172.

    Gorelov M.A., Ereshko F.I. Awareness and Control Decentralization // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 6. P. 1109–1122.

23. *Горелов М.А., Ерешко Ф.И.* Информированность и децентрализация управления (стохастический случай) // АиТ. 2020. № 1. С. 52–66.

    Gorelov M.A., Ereshko F.I. Awareness and Control Decentralization: Stochastic Case // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 1. P. 41–52.

24. *Ерешко Ф.И., Злобин А.С.* Алгоритм централизованного распределения ресурсов между активными подсистемами // Экономика и мат. методы. 1977. № 4. С. 703–713.

25. *Ereshko F.I., Zlobin A.S.* Mathematical methods for the analysis of hierarchical systems. II / Numerical methods for solving game-theoretic, equilibrium and pareto optimization problems. IIASA. Laxenburg, Austria: CP-84-20. 1984. P. 1–26.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 30.05.2024

После доработки 02.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024